КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Кафедра математики и экономической информатики

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Линейная алгебра» для студентов, обучающихся по направлению 0801000.62 «Экономика», по темам: «Транспортные задачи линейного программирования», «Задача о загрузке оборудования»

Казань 2013

Составители:

к.физ.-мат.н.,доцент **Воронцова В.Л.**,

к.физ.-мат.н.,доцент Р**оманова Е.М.**,

к.пед.н.,ст.преп. **Зайнуллина Л.Н.**

Рецензенты:
к.физ.-мат.н., доцент **Хасанова А.Ю.**
к.физ.-мат.н., доцент **Опокина Н.А.**

Обсуждена на заседании кафедры математики и экономической информатики?
протокол №7 от 23 января 2013 г.

Утверждена учебно-методической комиссией института, протокол № 3 от 15 ноября 2013 г.

Содержание

Введение

Транспортная задача — это экономическая задача о поиске оптимального распределения поставок однородного товара от поставщиков к потребителям при известных затратах на перевозку (тарифах) между пунктами отправления и назначения. Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач линейного программирования с единой математической моделью. Эти задачи настолько своеобразны, что для их решения были разработаны специальные методы, позволяющие найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Данное методическое пособие способствует более глубокому изучению тем «Транспортные задачи линейного программирования» и «Задача по загрузке оборудования », которые входят в общий курс **«Линейная алгебра»** и состоит из трех разделов.

Первый раздел содержит теоретическую базу по данным темам. Здесь наиболее полно раскрыты все теоретические вопросы, подобран уникальный материал, представлены редкие виды задач по данной тематике, а также рассмотрены экономические приложения, которые не так часто можно встретить в классическом изложении данного раздела математического программирования.

Второй раздел содержит перечень контрольных вопросов по рассмотренным темам и практические задания для самостоятельной работы. В отличие от ранее изданных методических пособий теоретический материал дополнен 23 вопросами и набором 30 вариантов типовых заданий для самостоятельной работы.

Третий раздел представлен банком тестовых заданий в количестве 30 вопросов.

Подробное описание применяемых методов, детальный разбор решения задач способствует лучшему усвоению материала на практике и закреплению его студентами самостоятельно. Приведенные примеры дают возможность студентам применять теоретические знания, полученные на лекциях, самостоятельно формулировать постановку задачи, составлять экономико-математические модели (ЭММ), выбирать алгоритм решения поставленной задачи и грамотно ее оформлять. В пособии приводится экономическая интерпретация полученных решений, что развивает у студентов навыки применения математических методов в экономических исследованиях.

Приведенные контрольные вопросы и тестовые задания предназначены для проверки качества усвоения теоретического материала. Ответы на контрольные вопросы и тестовые задания готовятся студентами самостоятельно и проверяются преподавателем на практических занятиях.

Данное учебно-методическое пособие может быть использовано в будущем также при изучении дисциплины **«Экономико-математические методы».**

1. Теоретические основы, методы и примеры решений транспортных задач линейного программирования

1.1. Постановка и ЭММ транспортной задачи

Транспортная задача формулируется в следующем виде. Некоторый однородный груз, сосредоточенный у m поставщиков в количествах a_1, a_2, …, a_m единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям в количествах b_1, b_2, …, b_n единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю ($i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n$).

Требуется составить план перевозок, при котором суммарная стоимость всех перевозок, минимальна.

Предположим, что суммарные запасы груза равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

Обозначим через x_{ij} - количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Матрица $X=(x_{ij})_{mxn}$ называется матрицей (или планом) перевозок, а матрица $C=(c_{ij})_{mxn}$ матрицей тарифов. Тогда данные задачи можно представить в виде таблицы (таблица 1.1.1).

Таблица 1.1.1.

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}

Продолжение таблицы 1.1.1.

…	…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Составим ЭММ задачи.

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной. Минимизация транспортных затрат должна осуществляться при соблюдении следующих ограничений:

1. Груз каждого поставщика должен быть вывезен полностью, что математически выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}=a_i, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{cases} \qquad (2)$$

Эти уравнения получаются из строк таблицы 1.1.1.

2. Потребности каждого потребителя должны быть удовлетворены полностью, т.е. должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}=b_j, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения получаются из столбцов таблицы 1.1.1.

3.Переменные должны быть неотрицательны,

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n) \quad (4)$$

Суммарные затраты на перевозки выражаются функцией

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}, \quad (5)$$

которая должна принимать минимальное значение.

Таким образом, кратко математическая запись транспортной задачи следующая:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\,(\min) \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots m) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots n) \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n) \quad (9)$$

Задача содержит $m+n$ ограничений (7) и (8) с m×n переменными.

1.2. Закрытая и открытая модели. Теорема о существовании решения

Различают два вида моделей транспортной задачи: **закрытую** и **открытую.**

Определение 1.2.1. Модель транспортной задачи называется **закрытой**, если выполнено равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если данное равенство не выполнено, то модель называется **открытой**.

При этом если объем поставок $\sum_{i=1}^{m} a_i$ **больше** объема потребления $\sum_{j=1}^{n} b_j$, то будут удовлетворены все потребители, но часть груза останется на базах экономически невыгодных поставщиков. Тогда ЭММ транспортной задачи в этом случае математически выражается следующим образом:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,(\min) \qquad (10)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}\le a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}\le a_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}\le a_i, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}\le a_m \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}=b_j, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{cases} \qquad (12)$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \quad (13)$$

Если объем поставок $\sum_{i=1}^{m}a_i$ **меньше** объема потребления $\sum_{j=1}^{n}b_j$, весь груз будет вывезен, однако будут недопоставки груза экономически невыгодным потребителям. ЭММ транспортной задачи математически будет выглядеть следующим образом:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,(\min) \qquad (10^{*})$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}=a_i, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{cases} \qquad (11^*)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}\le b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}\le b_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}\le b_j, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots+x_{mn}\le b_n \end{cases} \qquad (12^*)$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \quad (13^*)$$

Теорема 1.2.1. Транспортная задача, для которой выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, имеет решение.

1.3. Основные способы построения начального опорного плана

Решение транспортной задачи начинается с построения опорного плана.

Определение 1.3.1. Опорный план называется **невырожденным**, если число положительных компонент равно $m + n - 1$, в противном случае план называется **вырожденным**.

Теорема 1.3.1. Опорный план транспортной задачи содержит не более $m + n - 1$ положительных компонент.

Каждому опорному плану должно соответствовать $m + n - 1$ занятых клеток, а остальные $m \times n - (m + n - 1) = (m-1)(n-1)$ клеток будут свободными.

Для определения первоначального опорного плана транспортной задачи существуют четыре метода: **метод «северо-западного» угла, метод минимальной стоимости, метод двойного предпочтения** и **метод аппроксимации Фогеля.**

1.3.1. Метод «северо-западного» угла

Построение плана начинается с заполнение верхнего левого угла таблицы. В клетку с номером (1, 1) вносится наименьший из объёмов груза у первого поставщика или первого потребителя, и остатком загружается соседняя клетка справа или снизу в зависимости от того, у кого объем груза больше. Затем переходим к клетке (2,2). Выбираем наименьший из объёмов груза у второго поставщика или второго потребителя, остаток заносим в соседнюю клетку и т.д.

Пример 1.3.1. Построить начальный план транспортной задачи, если исходные данные заданы в таблице 1.3.1.

Таблица 1.3.1.

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10	3	4	1
80	2	5	8	6
60	4	2	2	7

Решение:

Модель задачи закрытая, так как объем поставок равен объему потребления:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 250; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 250$$

Рассмотрим этапы составления плана методом «северо-западного» угла.

1. При нахождении опорного плана распределение груза начинают с клетки (1.1). В клетку (1.1) заносим $x_{12} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{110{,}120\} = 110$. Первый поставщик полностью отправил груз и поэтому x_{12}=x_{13}=x_{14}=0, соответствующие клетки (1.2), (1.3), (1.4) временно выводим из рассмотрения. Потребности 1-го потребителя остались неудовлетворенными на $b_1' = b_1 - a_1 = 120 - 110 = 10$ (таблица 1.3.2).

Таблица 1.3.2

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10 110	3 –	4 –	1 –
80	2	5	8	6
60	4	2	2	7

2. В клетку (2.1) занесем значение $x_{21} = \min\{a_1, b_1'\} = 10$. Первый потребитель удовлетворен полностью. Выводим из рассмотрения клетку (3.1). У 2-го поставщика осталось $a_2' = a_2 - b_1' = 80 - 10 = 70$ единиц груза (таблица 1.3.3).

Таблица 1.3.3

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10 110	3 –	4 –	1 –
80	2 10	5	8	6
60	4 –	2	2	7

3. Заполняем клетку (2.2), выбирая $x_{22} = \min\{a'_2, b_1\} = \min\{70,55\} = 55$, выводим из рассмотрения клетки (3.1) и (3.3). У 2-го поставщика осталось $a''_2 = a_2 - x_{22} = 70 - 55 = 15$ (таблица 1.3.4).

Таблица 1.3.4.

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10 110	3 _	4 _	1 _
80	2 10	5 55	8	6
60	4 _	2 _	2	7

4. Загружаем клетку (2.3), полагая $x_{23} = \min\{a''_2, b_3\} = 15$. Груз 2-го поставщика реализован полностью. В клетке (2.4) ставим прочерк, а $b'_3 = b_3 - x_{23} = 50 - 15 = 35$ (таблица 1.3.5).

Таблица 1.3.5.

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10 110	3 _	4 _	1 _
80	2 10	5 55	8 15	6 _
60	4 _	2 _	2	7

5. Записываем в клетку (3.3) $x_{33} = \min\{a_3, b_3'\} = \min\{60{,}35\} = 35$ (таблица 1.3.6). Потребности 3-го потребителя удовлетворены. Остаток груза поставщика составляет $a_3' = a_3 - x_{33} = 60 - 35 = 25.$

Таблица 1.3.6.

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10 / 110	3 / –	4 / –	1 / –
80	2 / 10	5 / 55	8 / 15	6 / –
60	4 / –	2 / –	2 / 35	7

6. Заполняется клетка (4.4): $x_{44} = a_3 - x_{33} = 60 - 35 = 25$. В результате получаем опорный план (таблица 1.3.7).

Таблица 1.3.7

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10 / 110	3 / –	4 / –	1 / –
80	2 / 10	5 / 55	8 / 15	6 / –
60	4 / –	2 / –	2 / 35	7 / 25

Или $$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 55 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 25 \end{pmatrix}$$

Суммарные расходы на перевозку составляют:

$$Z(X_1) = 10 \cdot 110 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 55 + 8 \cdot 15 + 2 \cdot 35 + 7 \cdot 25 = 1760$$

1.3.2. Метод минимальной стоимости.

При нахождении первоначального опорного плана среди всех стоимостей перевозок в таблице выбирается минимальная $(\min\{c_{ij}\} = c_{lk})$ и клетка *(l, к)* заполняется: $x_{lk} = \min\{a_l, b_k\}$. Затем из рассмотрения исключают *l*-ю строку, если запасы *l* -го поставщика исчерпаны ($x_{lk} = a_l$), или *к*-ый столбец, если спрос *к*-го потребителя удовлетворен полностью ($x_{lk} = b_k$). Или *l* -ю строку и *к*-ый столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя ($x_{lk} = a_l = b_k$). Из оставшихся свободных клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшей стоимостью и заполняют её аналогично предыдущей. Процесс распределения продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности – удовлетворены.

Пример 1.3.2. Составить методом минимальной стоимости план предыдущей транспортной задачи с исходными данными, представленными в таблице 1.3.1.

Решение:

Наименьшая стоимость перевозки $(\min\{c_{ij}\} = c_{14} = 1)$. Заполняем клетку (1.4). $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = 25$. При этом x_{24}=x_{34}=0 и четвертый столбец исключается из дальнейшего рассмотрения (таблица 1.3.8).

Таблица 1.3.8

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4	1 25
80	2	5	8	6 –
60	4	2	2	7 –

Минимальная из оставшихся стоимостей $c_{21}=c_{32}=c_{33}=2$. Выбираем одну из клеток, соответствующих данной стоимости, например, (2.1) и занесем в нее величину $x_{21}=\min\{a_2,b_1\}=80$. При этом $x_{22}=x_{23}=x_{24}=0$ и вторая строка из рассмотрения выводится (таблица1.3.9).

Таблица 1.3.9

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4	1 25
80	2 80	5 –	8 –	6 –
60	4	2	2	7 –

Находим минимальную стоимость среди оставшихся свободных клеток $c_{32}=c_{33}=2$. Заполняем клетку (3.2) $x_{32}=\min\{a_3,b_2\}=55$. При этом $x_{13}=0$ и второй столбец из рассмотрения выводится (таблица 3.10).

Таблица 1.3.10

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3 _	4	1 25
80	2 80	5 _	8 _	6 _
60	4	2 55	2	7 _

Далее заполняем клетку (3.3) $x_{33} = \min\{a_3 - x_{32}, b_3\} = 5$ полагая $x_{31}=0$, исключаем третью строку (таблица 1.3.11).

Таблица 1.3.11

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3 _	4	1 25
80	2 80	5 _	8 _	6 _
60	4 _	2 55	2 5	7 _

Теперь груз остался лишь у первого поставщика. Загружаем клетку (1.3),

$x_{13} = \min\{a_1 - x_{14}, b_3 - x_{33}\} = 45.$

Переходим к таблице (таблица 1.3.12).

Таблица 1.3.12

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3 _	4 45	1 25
80	2 80	5 _	8 _	6 _
60	4 _	2 55	2 5	7 _

А затем клетку (1.1) $x_{11} = \min\{40,40\} = 40$ (таблица 1.3.13).

Таблица 1.3.13

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10 40	3 _	4 45	1 25
80	2 80	5 _	8 _	6 _
60	4 _	2 55	2 5	7 _

В результате получим опорный план

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 45 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозок по плану X_2 составляет:

$Z(X_2) = 10 \cdot 40 + 4 \cdot 45 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 55 + 2 \cdot 5 = 885$ ед

Суммарная стоимость перевозок по плану X_1 полученному методом северо-западного угла выше, чем по плану X_2. Это связано с тем, что при получении плана перевозок X_1 не учитываются стоимости перевозок.

1.3.3.Метод двойного предпочтения.

Суть метода состоит в том, что для нахождения опорного плана по каждой строке выбирается клетка с наименьшей стоимостью и отмечается. Если имеются две клетки с одинаковой минимальной стоимостью, то отмечаются обе клетки. По каждому столбцу выбирается тоже клетка с наименьшей стоимостью и отмечается. Распределение груза начинается с клеток с двойными отметками по наименьшим стоимостям. Затем загружаются клетки с одной отметкой. Заполнение клеток производится также, как в методе наименьшей стоимости. Если все отмеченные клетки заполнены или часть из них прочеркнута, а опорный план еще не получен, то дальнейшая загрузка клеток производится по методу наименьшей стоимости.

Пример 1.3.3. Составим по данному методу план предыдущей транспортной задачи (таблица 1.3.1).

Решение: Отметим клетки с наименьшими тарифами (таблица 1.3.14)

Таблица1.3.14

a_i \ b_j	120	55	50	25
110	10	3	4	1✓✓
80	2✓✓	5	8	6
60	4	2✓✓	2✓✓	7

По первой строке $(\min\{c_{1j}\} = c_{14} = 1)$, и отмечаем клетку (1.4). По второй строке $(\min\{c_{2j}\} = c_{21} = 2)$, выбираем клетку (2.1) и отмечаем. По третьей строке $(\min\{c_{3j}\} = c_{32} = c_{33} = 2)$, им соответствуют клетки (3.2) и (3.3) отмечаем их. По первому столбцу $(\min\{c_{i1}\} = c_{21} = 2)$, соответствует клетке (2.1), отмечаем ее второй раз. По второму столбцу $(\min\{c_{i2}\} = c_{32} = 2)$, в клетку (3.2) ставится вторая отметка. По третьему столбцу $(\min\{c_{i3}\} = c_{33} = 2)$ и второй раз отмечается клетка (3.3). По четвертому столбцу $(\min\{c_{i4}\} = c_{14} = 1)$ и вторая отметка ставится в клетку (1.4).

Распределение груза начнем с клетки с двойной отметкой (1.4), где самая меньшая стоимость $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = 25$, при этом $x_{24}=x_{34}=0$, клетки (2.4), (3.4) выводятся из рассмотрения (таблица 1.3.15).

Таблица 1.3.15.

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4	1√√ 25
80	2√√	5	8	6 –
60	4	2√√	2√√	7 –

Затем заполним клетку с двойной отметкой (3.3), $x_{33} = \min\{a_3, b_3\} = 50$ и $x_{13}=x_{23}=0$, клетки (1.3), (2.3) выводим из рассмотрения (таблица 1.3.16).

Таблица 1.3.16

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4 –	1✓✓ 25
80	2✓✓	5	8 –	6 –
60	4	2✓✓	2✓✓ 50	7 –

Далее загрузим клетку с двойной отметкой (3.2), $x_{32} = \min\{a_3 - x_{33}, b_3\} = \min\{10{,}55\} = 10,\ x_{31} = 0$, то в клетке (3.1) ставится прочерк (таблица 1.3.17).

Таблица 1.3.17

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4 –	1✓✓ 25
80	2✓✓	5	8 –	6 –
60	4 –	2✓✓ 10	2✓✓ 50	7 –

Заполняем клетку с двойной отметкой (2.1).

$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{80{,}120\} = 80,\ x_{22} = 0,$ в клетке (2.2) ставим прочерк (таблица 1.3.18).

Таблица 1.3.18

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10	3	4 –	1٧٧ 25
80	2٧٧ 80	5 –	8 –	6 –
60	4 –	2٧٧ 10	2٧٧ 50	7 –

Больше отмеченных клеток нет, но опорный план еще не получен, и распределение груза продолжаем по методу наименьшей стоимости.

Заполняем клетку (1.2),

$x_{12} = \min\left\{a_1 - x_{14}, b_2 - x_{32}\right\} = \min\{110-25; 55-10\} = 45$ и клетку (1.1)

$x_{11} = \min\{a_1 - (x_{12} + x_{14}); b_1 - x_{21}\} = \min\{110 - (45 + 25); 120 - 80\} = 40$

Таблица 1.3.19

b_j / a_i	120	55	50	25
110	10 40	3 45	4 –	1٧٧ 25
80	2٧٧ 80	5 –	8 –	6 –
60	4 –	2٧٧ 10	2٧٧ 50	7 –

В результате получен начальный опорный план

$$X_3 = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 0 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозки по этому плану

$Z(X_3) = 10 \cdot 40 + 3 \cdot 45 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 50 = 840$ ед

Замечание. Может оказаться, что план транспортной задачи будет содержать меньше, чем $m+n-1$ положительных компонент. Это произойдет, если остаток груза i-го поставщика будет равен величине b_j или остаток неудовлетворенных потребностей j-го потребителя будет равен a_i . Тогда занесем в следующую по строке или столбцу клетку (в ту из них, которой соответствует меньшая стоимость перевозки единицы груза) величину $x_{i,j+1}=0$ (или $x_{i+1,j}=0$) и будем считать ее условно занятой. Она соответствует нулевым значениям базисных переменных, т.е. получается вырожденный опорный план. При этом следует проверять, чтобы не было ни одной замкнутой ломаной, все вершины которой находились бы в занятых клетках.

1.3.4.Метод аппроксимации Фогеля.

При составлении первоначального опорного плана данным методом по всем строкам и столбцам определяют разность между двумя наименьшими тарифами. Эти разности записывают в отдельные строку и столбец распределительной таблицы. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (столбце) с максимальной разностью определяют минимальный тариф и заполняют соответствующую этому тарифу клетку. Распределение груза производится по рассмотренным ранее правилам. Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Пример 1.3.4. Рассмотрим данный метод для предыдущего примера (таблица 1.3.1)

Решение:

Составим первую таблицу (таблица 1.3.20) по исходным данным (таблица 1.3.1)

Первый этап

Таблица 1.3.20

					Этапы
b_j \ a_i	120	55	50	25	N1
110	10	3	4	1 25	2
80	2	5	8	6 –	3
60	4	2	2	7 –	0
N1	2	1	2	5	

На первом этапе максимальная разность равна 5 и соответствует 4-му столбцу. Минимальный тариф в 4-м столбце c_{14}=1, заполняем клетку (1,4): $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{110{,}25\} = 25$

Исключаем из рассмотрения 4-ый столбец, у 1-го поставщика остается

a_1'*=110-25=85*. После этого определяем следующую клетку для заполнения

(таблица 1.3.21).

Второй этап

Таблица 1.3.21

					Этапы	
b_j \ a_i	120	55	50	25	N1	N2
110	10	3	4	1 25	2	1
80	2 80	5 -	8 -	6 -	3 -	3 -
60	4	2	2	7 -	0	0
N1	2	1	2	5		
N2	2	1	2	-		

На 2-м этапе максимальная разность равна 3 и соответствует 2-ой строке. Минимальный тариф в этой строке равен c_{21}=2, заполняем клетку (2,1): $x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{80{,}120\} = 80.$

Исключаем из рассмотрения 2-ую строку, у 2-го поставщика груза не осталось.

После этого определяем следующую клетку для заполнения. Потребности 1-го потребителя остались не удовлетворены на $b_1'=120-80=40$ (таблица 1.3.22).

Третий этап

Таблица 1.3.22

					Этапы		
b_j / a_i	120	55	50	25	N1	N2	N3
110	10 _	3	4	1 25	2	2	1
80	2 80	5 _	8 _	6 _	3	3	-
60	4 40	2 _	2	7 _	0	0	0
N1	2	1	2	5			
N2	2	1	2	-			
N3	6	1	2	-			

На 3-м этапе максимальная разность равна 6 и соответствует 1-ому столбцу. Минимальный тариф в этом столбце равен c_{31}=4, заполняем клетку (3,1): $x_{31} = \min\{a_3; b_1'\} = \min\{60;40\} = 40$. Исключаем из рассмотрения первый столбец.

При этом, a''_3=60 -40=20 (таблица 1.3.23).

Четвертый этап

Таблица 1.3.23

					Этапы			
b_j / a_i	120	55	50	25	N1	N2	N3	N4
110	10 –	3	4	1 25	2	2	2	1
80	2 80	5 –	8 –	6 –	3	3	-	-
60	4 40	2 –	2 20	7 –	0	0	0	0
N1	2	1	2	5				
N2	2	1	2	-				
N3	2	1	2	-				
N4	-	3	4	-				

На 4-м этапе максимальная разность равна 4 и соответствует 3-ему столбцу. Минимальный тариф в этом столбце равен c_{33}=2, заполняем клетку (3,3): $x_{33} = \min\{a'_3; b_3\} = \min\{20;50\} = 20$. Исключаем из рассмотрения третью строку. b''_3 =50-20=30 (таблица 1.3.24).

Пятый этап

Таблица 1.3.24

					Этапы				
b_j a_i	120	55	50	25	N1	N2	N3	N4	N5
110	10 -	3	4 30	1 25	2	2	2	2	-
80	2 80	5 -	8 -	6 -	3	3	-	-	-
60	4 40	2 -	2 20	7 -	0	0	0	0	-
N1	2	1	2	5					
N2	2	1	2	-					
N3	2	1	2	-					
N4	2	1	2	-					
N5	-	3	-	-					

На 5-м этапе максимальная разность равна 4 и соответствует 3-ему столбцу. Минимальный тариф в этом столбце равен c_{13}=4, заполняем клетку (1,3): $x_{13} = \min\{a'_1; b''_3\} = \min\{85;30\} = 30$. Исключаем из рассмотрения третий столбец. При этом, a''_1=85-30=55 (таблица 1.3.25).

Шестой этап

Таблица 1.3.25

					Этапы					
b_j / a_i	120	55	50	25	N1	N2	N3	N4	N5	N6
110	10 -	3 55	4 30	1 25	2	2	2	2	-	3
80	2 80	5 -	8 -	6 -	3	3	-	-	-	-
60	4 40	2 -	2 20	7 -	0	0	0	0	0	-
N1	2	1	2	5						
N2	2	1	2	-						
N3	2	1	2	-						
N4	2	1	2	-						
N5	2	1	2	-						
N6	-	3	-	-						

На 6-м этапе максимальная разность равна 3 и соответствует 2-ому столбцу. Минимальный тариф в этом столбце равен c_{12}=3, заполняем клетку (1,2): $x_{12} = \min\{a_1''; b_2\} = \min\{55;55\} = 55$. Исключаем из рассмотрения третий столбец.

a''_1=85-30=55

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 30 & 25 \\ 80 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарная стоимость перевозки по этому плану

$Z(X_4) = 3 \cdot 55 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 670$ единиц.

Наименьшую стоимость имеет первоначальный опорный план, полученный методом аппроксимации Фогеля.

Замечание. Отметим, что во всех построенных опорных планах не должно быть ни одной замкнутой ломаной, все звенья которой пересекаются под прямым углом и все вершины которой находились бы в занятых клетках.

1.4. Теорема об оптимальности плана. Метод потенциалов.

Полученный первоначальный опорный план транспортной задачи следует проверить на оптимальность. Если он не оптимален, его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.4.1. Если план $X^0=(x^0_{ij})_{mxn}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i, v_j, удовлетворяющих условиям:

$$u_i+v_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0 >0 \qquad (14)$$

$$u_i+v_j \leq c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0 = 0 \ (i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n) \qquad (15).$$

Числа u_i, v_j называются **потенциалами** соответственно i-го поставщика и j-го потребителя.

Из формулировки теоремы следует, что для оптимальности плана транспортной задачи необходимо выполнение условий:

а) для каждой **занятой** клетки сумма потенциалов должна быть **равна стоимости перевозки единицы груза (тарифу)**, стоящей в этой клетке, т.е. $u_i+v_j=c_{ij}$ для $x_{ij}^0>0$;

б) для каждой **свободной** клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна **тарифу** в этой клетке, т.е. $u_i+v_j\leq c_{ij}$ для $x_{ij}^0=0$.

Алгоритм метода потенциалов

1.По одному из рассмотренных выше методов составляется первоначальный опорный план.

2.Проверяется число занятых клеток, которое должно равняться $N = m + n - 1$.

Если $N<m + n - 1$ (план вырожденный), то $(m + n -1)-N$ клеток заполняется нулевыми перевозками $x_{ij}^{0}=0$.

3.Находят потенциалы поставщиков и потребителей u_i,v_j из системы $m + n - 1$ уравнений $u_i+v_j=c_{ij}$ для занятых клеток .

Так как число уравнений меньше числа неизвестных $m + n$, то один из потенциалов принимается за 0, а остальные определяются однозначно.

Найденные значения u_i, v_j заносятся в таблицу.

4.Вычисляют оценки для всех свободных клеток по формуле

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \qquad (16)$$

Если все $\gamma_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $\gamma_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный.

Если хотя бы одна оценка $\gamma_{ij} = 0$, то задача имеет бесчисленное множество оптимальных планов. Если хотя бы одна оценка $\gamma_{ij} < 0$, то план не оптимален и переходят к новому опорному плану.

5.Среди отрицательных оценок γ_{ij} выбирают минимальную и для соответствующей клетки строят цикл пересчета.

Пусть $\min\{\gamma_{ij}\} = \gamma_{st}$ и для клетки (s,t) строится **цикл** (цепь).

Определение 1.4.1. Циклом в таблице условий транспортной задачи называется замкнутая ломаная линия, состоящая из звеньев, пересекающих под прямым углом. Все вершины ломаной находятся в занятых клетках, кроме клетки (s,t). Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл.

Причем, возможны следующие виды циклов (рис. 1.4.1):

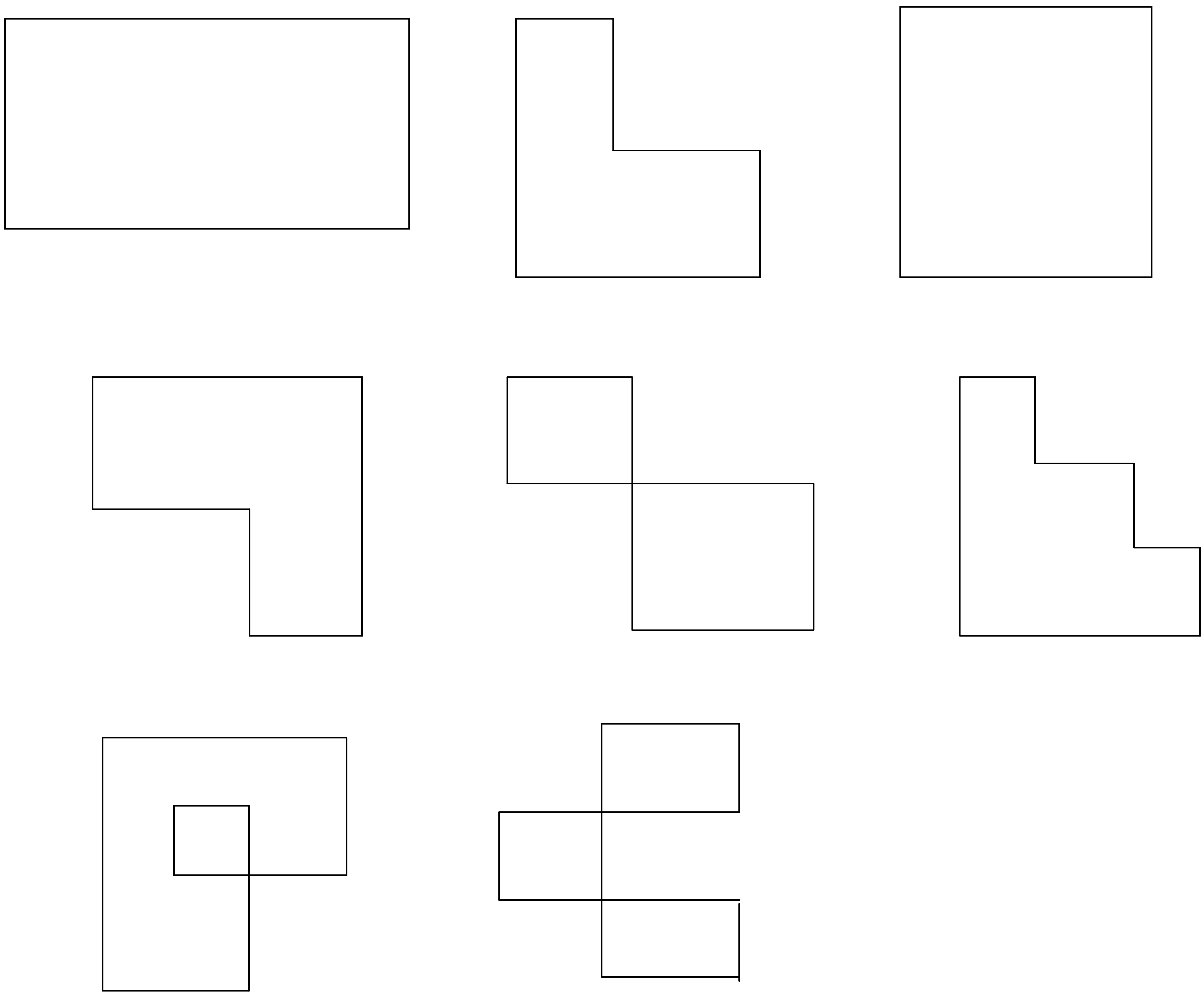

Рис.1.4.1. Виды циклов

Построенный цикл обходим против часовой стрелки, начиная с клетки *(s,t)* и отмечаем его вершины попеременно знаками плюс и минус. Вершине в клетке *(s,t)* присваивается знак плюс. Клетки цикла, отмеченные знаком «+», образуют «положительную полуцепь», а знаком «-» - «отрицательную полуцепь». Среди поставок в клетках отрицательной полуцепи выбирается минимальная. Пусть

$$\min\{x_{ij}\} = x_{pq} = \theta \ .$$

Число θ к поставкам при положительных вершинах прибавляется. А из поставок при отрицательных вершинах вычитается. В результате происходит перераспределение груза по вершинам цикла и получается новый опорный план. Экономически оценка γ_{st} показывает на сколько единиц уменьшатся транспортные издержки при загрузке клетки *(s,t)*единицей груза. Отсюда следует, что при загрузке *(s,t)* грузом в θ единиц, значение целевой функции уменьшится на величину $\Delta Z = \theta \cdot |\gamma_{st}|$.

6.Новый опорный план снова проверяют на оптимальность, т.е. повторяют все действия, начиная с этапа 3. Процесс перехода от одной расчетной таблицы к другой называется **итерацией**.

Следует отметить, что если при отрицательных вершинах имеется два или более одинаковых минимальных значения θ, освобождают только одну из этих клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Пример 1.4.1.

Данные транспортной задачи приведены в следующей таблице

Таблица 1.4.1

a_i \ b_j	80	90	150	100
55	2	4	5	5
115	4	3	2	1
155	2	4	5	3
125	6	6	5	8

Требуется составить экономико-математическую модель задачи, определить план закрепления потребителей за поставщиками груза, минимизирующий суммарные транспортные затраты.

Решение:

Модель задачи открытая, так как объем поставок больше объема потребления:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 450; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 420$$

Для сведения открытой модели к закрытой, вводим фиктивного потребителя с объемом потребления равным 30 единицам и с нулевыми тарифами $c_{i5}=0$, так как фиктивным потребителям поставка груза не осуществляется .

Составим первоначальный опорный план по методу наименьшей стоимости

Таблица 1.4.2

a_i \ b_j	80	90	150	100	30
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -
115	4 -	3 -	2 15	1 100	0 -
155	2 25	4 90	5 40	3 -	0 -
125	6 -	6 -	5 95	8 -	0 30

Проверим полученный план на оптимальность. Число занятых клеток должно быть $N=m+n-1=4+5-1=8$. Это условие выполнено, таким образом полученный план является невырожденным. Находим потенциалы поставщиков и потребителей системы, исходя из условия, что $u_i+v_j=c_{ij}$ для $x_{ij}^0>0$ (занятые клетки).

Тогда получим следующую систему уравнений, содержащую 6 уравнений с 7 неизвестными: $u_1+v_1=2$; $u_2+v_3=2$; $u_2+v_4=1$; $u_3+v_1=2$; $u_3+v_2=4$; $u_3+v_3=5$; $u_4+v_3=5$; $u_4+v_5=0$. Полагая $u_3=0$, находим $v_1=2$; $v_2=4$; $v_3=5$; $u_1=0$; $u_2=-3$; $v_4=4$; $u_4=0$; $v_5=0$. Потенциалы проставляем в следующую таблицу 1.4.3.

Таблица 1.4.3

a_i \ b_j	80	90	150	100	30	U_i
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -	0
115	4 -	3 -	2 15	1 100	0 -	-3
155	2 25	4 90	5 40	3 -	0 -	0
125	6 -	6 -	5 95	8 -	0 30	0
V_j	2	4	5	4	0	

Для каждой свободной клетки вычисляем оценку:

$$\gamma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 4 - (0 + 4) = 0$$

$$\gamma_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (0 + 5) = 0$$

$$\gamma_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 5 - (0 + 4) = 1$$

$$\gamma_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 0 - (0 + 0) = 0$$

$$\gamma_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 4 - ((-3) + 2) = 5 > 0$$

$$\gamma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 3 - ((-3) + 4) = 2 > 0$$

$$\gamma_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 0 - ((-3) + 0) = 3 > 0$$

$\gamma_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 3 - (0 + 4) = -1 < 0$

$\gamma_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 - (0 + 0) = 0$

$\gamma_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 6 - (0 + 2) = 4 > 0$

$\gamma_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (0 + 4) = 2 > 0$

$\gamma_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 8 - (0 + 4) = 4 > 0$

Так как среди оценок имеется отрицательная, то построенный план не оптимален и надо перейти к новому опорному плану. Так как $\gamma_{34} = -1$ является отрицательной оценкой, то для клетки (3.4) строим цикл (таблица 1.4.4).

Таблица 1.4.4

b_j / a_i	80	90	150	100	30	U$_i$
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -	0
115	4 -	3 -	2 «+» 15	1 «-» 100	0 -	-3
155	2 25	4 90	5 «-»40	3 «+»-	0 -	0
125	6 -	6 -	5 95	8 -	0 30	0
V$_j$	2	4	5	4	0	

Вершине цикла в клетке (3.4) присваиваем знак плюс, а остальным вершинам – попеременно знаки минус и плюс. Среди клеток отрицательной полуцепи находим минимальный объем поставок $\theta = \min\{40{,}100\} = x_{33} = 40$.

Число $\theta = 40$ из значений x_{ij} отрицательной полуцепи вычитаем, к значениям x_{ij} положительной полуцепи прибавляем. В результате происходит перераспределение груза по вершинам цикла.

$x'_{34} = 0 + 40 = 40; x'_{23} = 15 + 40 = 55; x'_{24} = 100 - 40 = 60; x'_{33} = 40 - 40 = 0$

При этом клетка (3.4) с отрицательной оценкой $\gamma_{34} = -1$ станет занятой, клетка (3.3) – свободной. Получаем новый опорный план (таблица 1.4.5).

Таблица 1.4.5

a_i \ b_j	80	90	150	100	30
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -
115	4 -	3 -	2 55	1 60	0 -
155	2 25	4 90	5 -	3 40	0 -
125	6 -	6 -	5 95	8 -	0 30

Вновь находим потенциалы поставщиков и потребителей:

$u_1+v_1=2$; $u_2+v_3=2$; $u_2+v_4=1$; $u_3+v_1=2$; $u_3+v_2=4$; $u_3+v_4=3$; $u_4+v_3=5$; $u_4+v_5=0$

Полагая $u_3=0$, находим $v_1=2$; $v_2=4$; $v_4=3$; $u_1=0$; $u_2=-2$; $v_3=4$; $u_4=1$; $v_5=-1$

Таблица 1.4.6

b_j / a_i	80	90	150	100	30	U_i
55	2 / 55	4 / -	5 / -	5 / -	0 / -	0
115	4 / -	3 / -	2 / 55	1 / 60	0 / -	-2
155	2 / 25	4 / 90	5 / -	3 / 40	0 / -	0
125	6 / -	6 / -	5 / 95	8 / -	0 / 30	1
V_j	2	4	4	3	-1	

Вычисляем оценки для свободных клеток:

$$\gamma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 4 - (0 + 4) = 0$$

$$\gamma_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (0 + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 5 - (0 + 3) = 2 > 0$$

$$\gamma_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 0 - (0 - (-1)) = 1 > 0$$

$$\gamma_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 4 - ((-2) + 2) = 4 > 0$$

$$\gamma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 3 - ((-2) + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 0 - ((-2) - 1) = 3 > 0$$

$$\gamma_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - (0 + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 - (0 - (-1)) = 1 > 0$$

$$\gamma_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 6 - (1 + 2) = 3 > 0$$

$$\gamma_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (1 + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 8 - (1 + 3) = 4 > 0$$

Все оценки $\gamma_{ij} \geq 0$, следовательно, полученный план

$$X^0 = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 60 & 0 \\ 25 & 90 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

является оптимальным. Так как есть оценка $\gamma_{11} = 0$, то задача имеет неединственное решение. Минимальные транспортные расходы для этого плана.

$Z(X^0) = 2 \cdot 55 + 2 \cdot 55 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 90 + 3 \cdot 40 + 5 \cdot 95 + 0 \cdot 30 = 1285$ ед.

Для закрепления темы рассмотрим еще одну задачу, но с вырожденным планом.

Пример 1.4.2. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 1.4.7:

Таблица 1.4.7

a_i \ b_j	10	20	20	40
10	1	5	3	1
20	2	4	2	3
10	3	10	15	9
40	5	6	11	7

Решение:

1) Проверим выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости транспортной задачи (закрытость модели). Для этого вычислим суммарные запасы и потребности:

$\sum a_i = 80$ – общие запасы, $\sum b_j = 90$ – общие потребности.

Потребности превышают запасы на 10 ед. Модель задачи открытая. Необходимо ввести 5-го фиктивного поставщика, объем запасов которого $a_5 = 90 - 80 = 10$ ед., полагая тарифы $c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = 0$. Запишем условия полученной закрытой модели в следующей таблице 1.4.8:

Таблица 1.4.8

a_i \ b_j	10	20	20	40
10	1 10	5 _	3 _	1 _
20	2 _	4 _	2 20	3 _
10	3 _	10 _	15 _	9 10
40	5 _	6 20	11 _	7 20
10	0 _	0 _	0 _	0 10

2) Построим начальный опорный план транспортной задачи и проверим его невырожденность.

При составлении первоначального опорного плана методом минимальной стоимости выбираем наименьшую стоимость только среди стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (или потребности фиктивного потребителя) распределяем в последнюю очередь. Это позволяет получить план, более близкий к оптимальному. Распределение груза методом минимальной стоимости дано в выше приведенной таблице (таблица 1.4.8).

Так как число занятых клеток равно $N = 6 < 8 = m + n - 1$, то построенный план является вырожденным. Определим базисные нули в таких пустых клетках, которые не образуют цикл. Для проверки возможности образования цикла используется так называемый **метод вычеркивания,** суть которого в следующем. Если в строке или столбце таблицы одна занятая клетка, то она не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или столбце. Именно в этих строках и столбцах с единичными занятыми клетками можно выбирать базисные нули. Если в таблице исключить все строки и столбцы, содержащие по одной занятой клетке, то в результате такого «вычеркивания» останется часть клеток, которые могут образовывать цикл. Таким образом, нулевые поставки помещаются в незанятые клетки с учетом наименьшей стоимости так, чтобы в каждых строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке. Такая клетка становится условно занятой. Например, условно занятыми можно считать клетки с номерами (3,1) и (5,2). После добавления $(m + n - 1) – N = 8-6 = 2$ базисных нулей план можно считать невырожденным (таблица 1.4.9).

Можно руководствоваться другим, более простым правилом. Среди всех незанятых клеток выбираем те, которые не образуют замкнутого цикла с другими занятыми клетками. Если таких клеток несколько, то выбираем ту, которая имеет наименьший тариф.

Таблица 1.4.9

b_j / a_i	10	20	20	40
10	1 10	5 _	3 _	1 _
20	2 _	4 _	2 20	3 _
10	3 0*	10 _	15 _	9 10
40	5 _	6 20	11 _	7 20
10	0 _	0 _	0 0*	0 10

3) Проверим опорный план на оптимальность.

Вычисляем потенциалы для занятых клеток. Составляем систему уравнений для нахождения потенциалов: $u_i+v_j=c_{ij}$ для $x_{ij}>0$. Она состоит из $m + n$ -1 = 8 уравнений с $m + n$ = 9 числом неизвестных. Полагая v_4 =0 (это тот столбец, где больше всего занятых клеток), получаем u_1 =7, u_2 *=2,* u_3 =9, u_4 = 7, u_5 = 0, v_1 = -6, v_2 = -1, v_3 = 0. Значения потенциалов также можно вычислить устно по таблице 4.10.

Находим оценки для свободных клеток: $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j)$ при x_{ij}=0.

Имеем $\gamma_{12}=-1$, $\gamma_{13} = -4$, $\gamma_{14} = -6$, $\gamma_{21}=-2$, $\gamma_{22} = 3$, $\gamma_{24} =1$, $\gamma_{32} =2$, $\gamma_{33} =6$, $\gamma_{41} =4$, $\gamma_{43} =4$, $\gamma_{41} =6$, $\gamma_{42} =1$. Так как не все оценки положительны, то данный план не является оптимальным.

Таблица 1.4.10

b_j / a_i	10	20	20	40	U_i
10	1 10	5 _	3 _	1 _	7
20	2 _	4 _	2 20	3 _	2
10	3 0*	10 _	15 _	9 10	9
40	5 _	6 20	11 _	7 20	7
10	0 _	0 _	0 0*	0 10	0
V_j	-6	-1	0	0	

4) Перейти к новому опорному плану.

Для этого строится цикл из клетки с наименьшей отрицательной оценкой: min γ_{ij} = γ_{14} = *-6*. Таким образом, цикл имеет начало в незанятой клетке (1,4) и вершины в занятых – (1,1), (3,1), (3,4). Начиная с клетки (1,4) расставляем поочередно знаки «+» и «-». Среди объемов перевозок в клетках отрицательной полуцепи выбираем наименьший груз. Он в нашем случае составляет 10 ед. Этот объем поставок добавляем в клетки положительной полуцепи и отнимаем из клеток отрицательной. Осуществляя таким образом перераспределение груза, получим новое улучшенное опорное решение. Причем, так как из клеток (1,1) и (4,4) вычитается одинаковое количество груза, то в новом опорном плане в клетку (1,1) мы поставим прочерк, а в клетку (4,4) запишем нуль.

Таблица 1.4.11

a_i \ b_j	10	20	20	40	U_i
10	1«-» 10	5 _	3 _	1«+» _	7
20	2 _	4 _	2 20	3 _	2
10	3 «+»0*	10 _	15 _	9 «-»10	9
40	5 _	6 20	11 _	7 20	7
10	0 _	0 _	0 0*	0 10	0
V_j	-6	-1	0	0	

5) Проверим новый опорный план на невырожденность и оптимальность. Полученный вновь план является невырожденным, так как $m + n$ -1=8 и равно числу занятых клеток. Вычислив потенциалы u_i и v_j для занятых клеток и оценки γ_{ij} для пустых клеток, удостоверимся, что план оптимальный (таблица 1.4.12).

Таблица 1.4.12

b_j / a_i	10	20	20	40	U_i
10	1 _	5 _	3 _	1 10	1
20	2 _	4 _	2 20	3 _	2
10	3 10	10 _	15 _	9 0*	9
40	5 _	6 20	11 _	7 20	7
10	0 _	0 _	0 0*	0 10	0
V_j	-6	-1	0	0	

Вывод: Построенный план

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0* \\ 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0* & 10 \end{pmatrix}$$

является оптимальным, так как все оценки неотрицательны. Полученный оптимальный план является единственным, так как для свободных клеток все оценки положительны.

Транспортные издержки по этому плану составляют

$z(X_0)$= 1 · 10+ 2· 20+ 3 · 10+ 6 · 20+ 7· 20 = 340 ед. При этом четвертый потребитель недополучит 10 единиц груза.

1.5. Блокирование перевозок.

В реальных условиях перевозки груза от определенных поставщиков к отдельным потребителям не могут быть осуществлены. Такие условия возникают в задачах по перевозке однородного груза и при исследовании открытых моделей, если:
а) требуется полностью удовлетворить спрос некоторого потребителя, в случае, когда суммарный запас груза у поставщиков меньше суммарного объема потребления; *б*) требуется вывезти весь груз некоторого поставщика при условии, когда суммарный запас груза у поставщиков превышает суммарные потребности.

Предположим, что перевозки от i-го поставщика j-му потребителю должны быть исключены. Это условие будет выполнено, если в оптимальном плане транспортной задачи клетка (i,j) будет свободной, т.е. $x^0_{ij}=0$. Для определения оптимальных планов таких задач стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю устанавливают значительно больше любой из стоимостей перевозок решаемой задачи, т.е. принимают $c_{ij}=M$, где M – достаточно большое положительное число по сравнению со стоимостями перевозок в других клетках. При таком предположении в оптимальном плане клетка (i,j) будет свободной. Это условие будет удовлетворено, если в оптимальном плане данный поставщик не будет закреплен за $(n+1)$ – ым фиктивным потребителем. Поэтому клетку $(i,n+1)$ **блокируют**, полагая $c_{i,n+1}=M$. Такой метод называется **методом запрещения перевозок** или **блокированием клеток**.

Проиллюстрируем данный метод на следующем примере.

Пример 1.5.1. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в примере 1.4.1 (таблица 1.4.1), при дополнительном условии: из 4-го пункта отправления груз должен быть вывезен полностью.

Решение:

Модель приведена к закрытому виду, введен 5-ый потребитель. В нашем случае блокируем клетку с номером (4,5)(таблица 1.5.1).

Таблица 1.5.1.

b_j / a_i	80	90	150	100	30
55	2 / 55	4 / -	5 / -	5 / -	0 / -
115	4 / -	3 / -	2 / 55	1 / 60	0 / -
155	2 / 25	4 / 90	5 / -	3 / 40	0 / -
125	6 / -	6 / -	5 / 95	8 / -	M / 30

Число занятых клеток должно быть $N=m+n-1=4+5-1=8$. Это условие выполнено. Находим потенциалы поставщиков и потребителей системы $u_1+v_1=2$; $u_2+v_3=2$; $u_2+v_4=1$; $u_3+v_1=2$; $u_3+v_2=4$; $u_3+v_4=3$; $u_4+v_3=5$;$u_4+v_5=$M, которая содержит 6 уравнений с 7 неизвестными. Полагая $u_3=0$, находим $v_1=2$; $v_2=4$; $v_4=3$; $u_2=-2$; $v_3=4$; $u_1=0$; $u_4=1$; $v_5=M-1$. Потенциалы проставляем в таблицу 1.5.2.

Для каждой свободной клетки вычисляем оценку:

$$\gamma_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=4-(0+4)=0$$

$$\gamma_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=5-(0+4)=1>0$$

$$\gamma_{14}=c_{14}-(u_1+v_4)=5-(0+3)=2>0$$

$$\gamma_{15}=c_{15}-(u_1+v_5)=0-(0+M-1)=1-M<0$$

$$\gamma_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=4-((-2)+2)=4>0$$

$$\gamma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=3-((-2)+4)=1>0$$

$$\gamma_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)=0-((-2)+M-1)=3-M<0$$

$$\gamma_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - (0 + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 - (0 + M - 1) = 1 - M < 0$$

$$\gamma_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 6 - (1 + 2) = 3 > 0$$

$$\gamma_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (1 + 4) = 1 > 0$$

$$\gamma_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 8 - (1 + 3) = 4 > 0$$

Таблица 1.5.2

b_j / a_i	80	90	150	100	30	U_i
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -	0
115	4 -	3 -	2 55	1 60	0 -	-2
155	2 25	4 90	5 -	3 40	0 -	0
125	6 -	6 -	5 95	8 -	M 30	1
V_j	2	4	4	3	M-1	

Так как среди оценок имеется отрицательная, то построенный план не оптимален и надо перейти к новому опорному плану. Отрицательных оценок несколько, выбираем наименьшую :1-M, такую оценку имеют две клетки $\gamma_{35} = \gamma_{15} = 1 - M$,

выбираем γ_{35}, для клетки (3.5) строим цикл (таблица 1.5.3).

Таблица 1.5.3

a_i \ b_j	80	90	150	100	30	U_i
55	2 / 55	4 / -	5 / -	5 / -	0 / -	0
115	4 / -	3 / -	2 «-» / 55	1 «+» / 60	0 / -	-2
155	2 / 25	4 / 90	5	3 «-» / 40	0 «+» / -	0
125	6 / -	6 / -	5 «+» / 95	8 / -	M «-» / 30	1
V_j	2	4	4	3	M-1	

Среди клеток отрицательной полуцепи находим минимальный объем поставок $\theta = \min\{55,40,30\} = x_{45} = 30$.

Число $\theta = 30$ из значений x_{ij} отрицательной полуцепи вычитаем, к значениям x_{ij} положительной полуцепи прибавляем. В результате происходит перераспределение груза по вершинам цикла.

$x'_{35} = 0 + 30 = 30; x'_{24} = 60 + 30 = 90; x'_{23} = 55 - 30 = 25; x'_{34} = 40 - 30 = 10;$
$x'_{43} = 95 + 30 = 125; x'_{45} = 30 - 30 = 0$

При этом клетка (3.5) с отрицательной оценкой $\gamma_{35} = 1 - M$ станет занятой, клетка (4.5) – свободной. Получаем новый опорный план (таблица 1.5.4).

Таблица1.5.4.

b_j / a_i	80	90	150	100	30
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -
115	4 -	3 -	2 25	1 90	0 -
155	2 25	4 90	5 -	3 10	0 30
125	6 -	6 -	5 125	8 -	M -

Находим потенциалы поставщиков и потребителей:

$u_1+v_1=2$; $u_2+v_3=2$; $u_2+v_4=1$; $u_3+v_1=2$; $u_3+v_2=4$; $u_3+v_4=3$; $u_3+v_5=0$; $u_4+v_3=5$

Полагая $u_3=0$, находим $v_1=2$; $v_2=4$; $v_4=3$; $v_5=0$; $u_1=0$; $u_2=-2$; $v_3=4$; $u_4=1$ (таблица 1.5.5)

Вычисляем оценки для свободных клеток:

$$\gamma_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=4-(0+4)=0$$

$$\gamma_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=5-(0+4)=1>0$$

$$\gamma_{14}=c_{14}-(u_1+v_4)=5-(0+3)=2>0$$

$$\gamma_{15}=c_{15}-(u_1+v_5)=0-(0+0)=0$$

$$\gamma_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=4-((-2)+2)=4>0$$

$$\gamma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=3-((-2)+4)=1>0$$

$$\gamma_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)=0-((-2)+0)=2>0$$

$$\gamma_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=5-(0+4)=1>0$$

$$\gamma_{41}=c_{41}-(u_4+v_1)=6-(1+2)=3>0$$

$$\gamma_{42}=c_{42}-(u_4+v_2)=6-(1+4)=1>0$$

$\gamma_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 8 - (1+3) = 4 > 0$

$\gamma_{45} = c_{45} - (u_5 + v_5) = M - (0+1) = M - 1 > 0$

Таблица 1.5.5

a_i \ b_j	80	90	150	100	30	U_i
55	2 55	4 -	5 -	5 -	0 -	0
115	4 -	3 -	2 25	1 90	0 -	-2
155	2 25	4 90	5 -	3 10	0 30	0
125	6 -	6 -	5 125	8 -	M -	1
V_j	2	4	4	3	0	

Все оценки $\gamma_{ij} \geq 0$, следовательно, полученный план

$$X^0 = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 90 & 0 \\ 25 & 90 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 125 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным. Так как есть $\gamma_{15} = \gamma_{12} = 0$, то задача имеет бесчисленное множество решений.

Минимальные транспортные расходы для этого плана.

$Z(X^0) = 2 \cdot 55 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 90 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 30 + 5 \cdot 125 = 1315$ ед.

При этом остаются невывезенными 30 единиц груза от 3-го поставщика .

Пример 1.5.2. Решить транспортную задачу из примера 4.2 при следующем дополнительном условии: запросы 4-ого потребителя обязательно должны быть полностью удовлетворены.

Решение:

1) Приведем модель задачи к закрытому виду и блокируем клетку (5,4). Используя метод минимальной стоимости, составим первоначальный опорный план, при этом сначала заполняется 4-ый столбец с той целью, чтобы запросы 4-ого потребителя были удовлетворены в полном объеме. Получаем таблицу 1.5.6:

Таблица 1.5.6

a_i \ b_j	10	20	20	40
10	1 _	5 _	3 _	1 10
20	2 _	4 _	2 _	3 20
10	3 10	10 _	15 _	9 _
40	5 0^*	6 20	11 10	7 10
10	0 _	0 _	0 10	M _

2) Проверяем построенный план на оптимальность.

Для занятых клеток находим потенциалы поставщиков и потребителей устно по таблице. При этом учитывается тот факт, что любой неизвестный потенциал для определенной занятой клетки равен разности соответствующего этой клетке тарифа и уже известного другого потенциала этой же клетки (таблица 1.5.7).

Таблица 1.5.7

b_j / a_i	10	20	20	40	U_i
10	1 _	5 _	3 _	1 10	-6
20	2 _	4 _	2«+» _	3«-» 20	-4
10	3 10	10 _	15 _	9 _	-2
40	5 0*	6 20	11 «-» 10	7 «+»10	0
10	0 _	0 _	0 10	M _	-11
V_j	5	6	11	7	

Так как среди оценок имеется отрицательная, то полученный план не является оптимальным. Наименьшая отрицательная оценка определяется для клетки (2,3). Строим цикл и переходим к новому опорному плану (таблица 1.5.8):

Таблица 1.5.8

a_i \ b_j	10	20	20	40	U_i
10	1 _	5 _	3 _	1 10	-6
20	2 _	4 _	2 10	3 10	-4
10	3 10	10 _	15 _	9 _	-2
40	5 0*	6 20	11 _	7 20	0
10	0 _	0 _	0 10	M _	-6
V_j	5	6	6	7	

Итак, получен оптимальный план задачи:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0* & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Он не единственен, так как есть нулевые оценки. При этом запросы 3-го потребителя полностью не удовлетворяются. Минимальная суммарная стоимость перевозок по данному плану составляет

$z(X_0)$ = 1 · 10 + 2· 10 + 3 · 10 + 3 · 10 + 6 · 20 + 7· 20 = 350 ед.

Следует также отметить, что дополнительное требование приводит к увеличению общей стоимости перевозок.

Примечание.

Аналогично решается задача и в том случае, когда суммарный запас груза превышает суммарный спрос потребителей, и требуется обязательно полностью вывезти груз некоторых поставщиков. Предположим, что груз i –го поставщика должен быть вывезен полностью. Это условие будет удовлетворено, если в оптимальном плане данный поставщик не будет закреплен за $(n + 1)$-ым фиктивным потребителем. Поэтому клетку $(i, n + 1)$ блокируют, полагая $c_{i,n+1} = M$

Если же потребности j–го потребителя должны быть удовлетворены полностью, то $c_{m+1,j}=M$.

1.6.Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Рассмотрим еще один тип задач, решаемых методом блокировки.

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, где a и b – постоянные величины.

1. Если $x_{lk} \geq a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы l-*го* поставщика и запросы k-*го* потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$). В полученном оптимальном решении X^* следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a, т.е. $x^*_{lk}= x'_{lk}+ a$.

2. Если $x_{lk} \leq b$, то необходимо вместо k-го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b'_k = b$, а другой с номером $n + 1$ - запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M $(M \gg 1)$. После получения

оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n+1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ - самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l, n+1)$ останется пустой ($x_{l(n+l)} = 0$) и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b.

Пример 1.6.1. Решить транспортную задачу в примере 1.5.2 при дополнительных условиях: объем перевозки груза от четвертого поставщика второму потребителю должен быть не более 10 единиц ($x_{42} \le 10$), и от второго четвертому - не менее 10 единиц ($x_{24} \ge 10$).

Решение:

Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки $x_{24} \ge 10$ был не менее 10 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика $a'_2 = a_2 - 10 = 20 - 10 = 10$ и запросы четвертого потребителя $b'_4 = b_4 - 10 = 40 - 10 = 30$ меньше фактических на 10 ед. После получения оптимального решения объем перевозки $x_{24} = x'_{24} + 10$ увеличим на 10 ед.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{42} \le 10$ вместо второго потребителя введем двух других: $b_2 = b'_2 + b'_5$. Один из них под прежним номером имеет запросы $b'_2 = 10$ ед. и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим пятый номер. Его запросы равны $b'_5 = 20 - 10 = 10$ ед. и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у второго потребителя, за исключением тарифа c_{45}, который приравняем сколь угодно большому числу M, т.е. $c_{45} = M$. После нахождения оптимального решения задачи к объемам перевозок второго потребителя необходимо прибавить соответствующие объемы перевозок пятого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид (таблица 1.6.1):

Таблица 1.6.1

b_j a_i	10	10	20	30	10
10	1 –	5 –	3 –	1 10	5 –
10	2 –	4 –	2 10	3	4 –
10	3 10	10 –	15 –	9 –	10 –
40	5 –	6 10	11 10	7 20	М –

Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:
$\sum a = 70 < \sum b = 80$. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_5 =$ 10 ед.

Составляем начальное опорное решение методом минимальной стоимости. Число занятых клеток $N = 7 < m+n-1 = 9$. План вырожден, вводим два базисных нуля в клетки (4,1) и (5,3). Теперь число занятых клеток $N = 9 = m+n-1 = 9$ и план транспортной задачи невырожденный (таблица 1.6.2).

Таблица 1.6.2

a_i \ b_j	10	10	20	30	10
10	1 _	5 _	3 _	1 10	5 _
10	2 _	4 _	2 10	3 _	4 _
10	3 10	10 _	15 _	9 _	10 _
40	5 0*	6 10	11 10	7 20	M _
10	0 _	0 _	0 0*	0 _	10

Проверяем построенный опорный план на оптимальность. Вычисляем потенциалы и оценки. Полагая, u_4=0, находим v_1=5, v_2=6, v_3=11, v_4=7; u_1=-6, u_2=-9, u_3=-2, u_5=-11 и v_5=11 (таблица 1.6.3)

По формуле $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ вычисляем оценки для свободных клеток и получаем:

γ_{11}= 2, γ_{12}= 5, γ_{13}= -2, γ_{15}= 0, γ_{21}= 6, γ_{22}= 7, γ_{24} = 5, γ_{25} = 2, γ_{32} = 6, γ_{33} = 6,

γ_{34} = 4, γ_{35} = 1, γ_{45} = M-11, γ_{51} = 6, γ_{52} = 5, γ_{54} = 4.

План оказался не оптимальным.

Строим цикл из клетки с наименьшей отрицательной оценкой – это клетка с номером (1,3) (таблица 1.6.3).

Таблица 1.6.3

b_j / a_i	10	10	20	30	10	U_i
10	1 _	5 _	3«+» _	1 «-» 10	5 _	-6
10	2 _	4 _	2 10	3	4 _	-9
10	3 10	10 _	15 _	9 _	10 _	-2
40	5 0*	6 10	11 «-» 10	7 «+»20	M _	0
10	0 _	0 _	0 0*	0 _	0 10	-11
V_j	5	6	11	7	11	

Среди клеток отрицательной полуцепи находим минимальный объем поставок $\theta = \min\{10{,}10\} = 10$.

Число $\theta = 10$ из значений объемов x_{ij} отрицательной полуцепи вычитаем, к значениям x_{ij} положительной полуцепи прибавляем. При этом, в клетке (1,4) ставим нуль, а в клетке (4,3) ставим прочерк. Переходим к новому опорному решению (таблица 1.6.4).

Таблица 1.6.4

b_j / a_i	10	10	20	30	10	U_i
10	1 _	5 _	3 10_	1 0*	5	-6
10	2 _	4 _	2 10	3	4	-7
10	3 10	10 _	15 _	9 _	10	-2
40	5 0*	6 10	11	7 30	M	0
10	0 _	0 _	0 0*	0 _	0 10	-9
V_j	5	6	9	7	9	

Получен оптимальный план приведенной транспортной задачи. Он не единственен, так как есть нулевые оценки.

Прибавляя ко второму столбцу пятый столбец: $b_2 = b'_2 + b'_5$, получим решение

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0* \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0* & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 0* & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение исходной задачи с учетом дополнительных ограничений и в силу того, что $x^*_{24} = x'_{24} + 10$, примет вид:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0* \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0* & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 0* & 0 \end{pmatrix}$$

Суммарные транспортные издержки по этому плану составляют

$z(X^*)=3\cdot10+ 2\cdot10+ 3\cdot10+ 6\cdot10+ 7\cdot10 = 350$ ед.

1.7. Задача по загрузке оборудования (λ – задача).

Пусть на предприятии имеются m различных станков, на которых может изготовляться любое из n изделий. Заданы: матрица производительностей $\lambda = (\lambda_{ij})_{m\times n}$, где λ_{ij} - производительность (шт/час) i -го станка при производстве j-го изделия, матрица затрат $C=(c_{ij})_{m\text{x}n}$, где c_{ij} - затраты (руб/шт.) на производство единицы j-го изделия на i -ом станке. Известны также мощности станков a_1, a_2, …, a_m (в станко-ч.) и плановое задание по выпуску изделий b_1, b_2, …, b_n в штуках. Исходные данные можно представить в виде таблицы 1.7.1.

Таблица 1.7.1

b_j a_i	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	C_{11} X_{11} λ_{11}	C_{12} X_{12} λ_{12}	…	C_{1j} X_{1j} λ_{1j}	…	C_{1n} X_{1n} λ_{1n}
a_2	C_{21} X_{21} λ_{21}	C_{22} X_{22} λ_{21}	…	C_{2j} X_{2j} λ_{2j}	…	C_{2n} X_{2n} λ_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	C_{i1} X_{i1} λ_{i1}	C_{i2} X_{i2} λ_{i2}	…	C_{ij} X_{ij} λ_{ij}	…	C_{in} X_{in} λ_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m	C_{m1} X_{m1} λ_{m1}	C_{m2} X_{m2} λ_{m2}	…	C_{mj} X_{mj} λ_{mj}	…	C_{mn} X_{mn} λ_{mn}

Требуется распределить производство изделий на различных станках так, чтобы при выполнении планового задания затраты были минимальными.

Составим ЭММ задачи. Обозначим через x_{ij} время в часах, в течение которого i -ый станок занят изготовлением j-го изделия.

Ограничения составляются исходя из следующих требований.

1. Суммарное время, затрачиваемое каждым i -ым станком, не должно превышать фонда рабочего времени данного станка:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,2,...m) \tag{17}$$

2. Каждое j-ое изделие должно быть изготовлено в требуемом количестве:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} \cdot x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,...n) \tag{18}$$

Где величина $\lambda_{ij} x_{ij}$ определяет количество изделий j-го вида, изготовляемых на i-ом станке.

Переменные могут принимать только неотрицательные значения:

$$x_{ij} \ge 0 \; (i = 1,2,...m; \; j = 1,2,...,n) \tag{19}$$

В качестве критерия эффективности принимаем суммарные затраты, которые должны быть минимальны. Затраты, связанные с производством j-го вида изделий на i-ом станке в количестве $\lambda_{ij} x_{ij}$ составляют $c_{ij} \lambda_{ij} x_{ij}$, откуда суммарные затраты на выполнение всего планового задания будут равны

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \lambda_{ij} x_{ij} \tag{20}$$

Математическая формулировка задачи: найти такие значения переменныхx_{ij}, которые удовлетворяют условиям (17) – (19) и обеспечивают минимум функции (20).

Предположим, что производительности любых двух станков пропорциональны. Выберем один из них, например, k-ый станок в качестве «базового» и составим отношения производительности любого i-го станка ($i=1,2,\ldots m$) к производительности k-го станка

$$\alpha_i = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{k1}} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{k2}} = \ldots = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kj}} = \ldots = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}} \qquad (21)$$

Число α_i называется индексом *i-го* станка и показывает, во сколько раз i-ый станок производительнее по сравнению с «базовым» станком. Из (21) следует

$$\lambda_{ij} = \alpha_i \lambda_{kj} \qquad (22)$$

Равенство (21) дает возможность выразить все данные задачи в одних единицах измерения. Выберем в качестве такой единицы **час работы «базового» станка** и назовем его **стандартным часом**.

Приведенный к стандартным часам фонд рабочего времени i-го станка составит

$$a_i' = \alpha_i a_i, (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (23)$$

Время, затрачиваемое на i-ом станке на производство j-го изделия, в стандартных часах будет:

$$x_i' = \alpha_i x_j, (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (24)$$

Заказ по j-му изделию составляет b_j штук. Если бы это изделие изготовлялось на «базовом» станке, то для его производства нужно было бы

$$b_j' = \frac{b_j}{\lambda_{kj}} \text{ стандартных часов. } (25)$$

Затраты по производству единицы j-го изделия на i-ом станке (в расчете на 1 стандартный час) составят

$$c_{ij}' = c_{ij} \lambda_{kj}, (i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n) \qquad (26)$$

Величины a_i', b_j', c_{ij}' называются приведенными к стандартным часам **ресурсами, потребностями и затратами**. Из равенств (23) – (26) получим

$$a_i = \frac{a'_i}{\alpha_i} \qquad (27)$$

$$x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\alpha_i} \qquad (28)$$

$$b_j = \lambda_{kj} \cdot b'_j \qquad (29)$$

$$c_{ij} = \frac{c'_{ij}}{\lambda_{kj}} \qquad (30)$$

С помощью этих соотношений, ограничения и целевую функцию задачи (17) – (20) преобразуем к следующей транспортной задаче: найти значения x'_{ij} , которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} \le a' \ (i = 1,2,...,m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b'_j \ (j = 1,2,...,n);$$

$$x'_{ij} = \alpha_i x_{ij} \ge 0$$

и обеспечивают минимум функции

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x'_{ij}$$

Необходимым и достаточным условием существования решения задачи является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{m} a'_i \ge \sum_{j=1}^{n} b'_j$$

Т.е. суммарные приведенные ресурсы должны быть не меньше суммарных приведенных потребностей.

Следует заметить, что при решении практических задач встречаются случаи, когда некоторые изделия не могут обрабатываться на отдельных станках, т.е. некоторые $\lambda_{kj} = 0$. Тогда в качестве «базового» станка следует выбрать тот станок, на котором могут изготовляться все изделия. Если $\lambda_{ij} = 0$, то при решении задачи с данными a'_i, b'_j, c'_{ij} необходимо блокировать клетку (i, j).

Может также оказаться, что условия пропорциональности станков (21) выполняются для некоторых станков лишь приближенно. Тогда индекс α_i определяется приближенно как среднее арифметическое взвешенное по формуле

$$\alpha'_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kj}} \cdot b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

Пример 1.7.1. Решите задачу о загрузке оборудования, исходные данные которой приведены в таблице 1.7.2

*Таблица 1.7.*2

a_i \ b_j	1050	2000	2500	3360	α_i
280	48 5	30 20	20 25	38 15	1
140	40 10	7 40	6 50	24 30	2
210	44 6	19 24	18 30	28 18	1,2

Решение:

Примем в качестве «базового» 1-ый станок. По формуле (21) определим индекс каждого станка:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{10}{5} = \frac{40}{20} = \frac{50}{25} = \frac{30}{15} = 2,$$

$$\alpha_3 = \frac{6}{5} = \frac{24}{20} = \frac{30}{25} = \frac{18}{15} = 1{,}2$$

и заносим в последний столбец таблицы 1.7.2.

Используя формулы (23), (24), (25), все данные выразим в стандартных часах:

$$a_1' = 1 \cdot 280 = 280,\ a_2' = 2 \cdot 140 = 280,\ a_3' = 1{,}2 \cdot 210 = 252$$

$$b_1' = \frac{1050}{5} = 210,\ b_2' = \frac{2000}{20} = 100,\ b_3' = \frac{2500}{25} = 100,\ b_4' = \frac{3360}{15} = 224,$$

$$c_{11}' = 48 \cdot 5 = 240\ c_{12}' = 30 \cdot 20 = 600\ \ c_{13}' = 20 \cdot 25 = 500\ \ c_{14}' = 38 \cdot 15 = 570$$

$$c_{21}' = 40 \cdot 5 = 200\ c_{22}' = 7 \cdot 20 = 140\ c_{23}' = 6 \cdot 25 = 150\ c_{24}' = 24 \cdot 15 = 360$$

$$c_{31}' = 44 \cdot 5 = 220\ c_{32}' = 19 \cdot 20 = 380\ c_{33}' = 18 \cdot 25 = 450\ c_{34}' = 28 \cdot 15 = 420$$

Полученные данные запишем в таблицу 1.7.3.

*Таблица 1.7.*3

a_i \ b_j	210	100	100	224
280	240	600	500	570
280	200	140	150	360
252	220	380	450	420

Задача о распределении ресурсов приведена к стандартной транспортной задаче с открытой моделью.

И имеется избыток мощности в 178 стандартных часов. Для приведения задачи к закрытой модели вводим 5-ый балансовый столбец, для которого полагается

$b_5' = 178, \quad c_{15}' = c_{25}' = c_{35}' = 0$ Данные таблицы 1.7.3 рассматриваем как данные соответствующей транспортной задачи с ресурсами a_i' , потребностями b_j' и затратами c_{ij}'.

Решим задачу методом потенциалов. Составим первоначальный опорный план методом минимальной стоимости. Проверяем данный план на оптимальность. Потенциалы поставщиков и потребителей вычисляем и заносим в таблицу 1.7.4.

Таблица 1.7.4

a_i \ b_j	210	100	100	224	178	U_i
280	240 _	600 _	500 _	570 102	0 178	170
280	200 80	140 100	150 100	360 _	0 _	0
252	220 130	380 _	450 _	420 122	0 _	20
V_j	200	140	150	400	-170	

Среди оценок свободных клеток имеются две отрицательные оценки γ_{11}=-130 и γ_{24} = - 40. Построив цикл для клетки (1,1) (таблица 1.7.5) и перераспределив груз – 102 единицы, получим новый опорный план, который запишем в таблицу 1.7.5.

Таблица 1. 7.5

b_j a_i	210	100	100	224	178	U_i
280	240«+» _	600 _	500 _	570«-» 102	0 178	170
280	200 80	140 100	150 100	360 _	0 _	0
252	220 «-» 130	380 _	450 _	420 «+»122	0 _	20
V_j	200	140	150	400	-170	

Среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка γ_{24}=-60. Построим цикл для клетки с номером (2,4) (таблица 1.7.6)

Таблица 1.7.6.

b_j a_i	210	100	100	224	178	U_i
280	240 102	600 _	500 _	570 _	0 178	40
280	200«+» 80	140 100	150 100	360«-» _	0 _	0
252	220 «-»28	380 _	450 _	420 «+»224	0 _	20
V_j	200	140	150	400	-40	

И перераспределив груз – 80 единиц, получим новый опорный план, который запишем в таблицу 1.7.7.

Таблица 1.7.7

a_i \ b_j	210	100	100	224	178	U_i
280	240 102	600 _	500 _	570 _	0 178	80
280	200 _	140 100	150 100	360 80	0 _	0
252	220 108	380 _	450 _	420 144	0 _	60
V_j	160	140	150	360	-80	

Для этого плана все $\gamma_{ij} \geq 0$. Следовательно, получили оптимальный план

$$X' = \begin{pmatrix} 102 & 0 & 0 & 0 & 178 \\ 0 & 100 & 100 & 80 & 0 \\ 108 & 0 & 0 & 144 & 0 \end{pmatrix}$$

По формуле (28) от стандартных часов перейдем к реальным часам работы каждого оборудования и получим оптимальное решение

$$X = \begin{pmatrix} 102 & 0 & 0 & 0 & 178 \\ 0 & 50 & 50 & 40 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 120 & 0 \end{pmatrix}$$

Согласно этому плану избыток мощности остается на 1-ом станке в количестве 178 часов его работы. При этом суммарные затраты по формуле (20) составят $z_{min} = 102\cdot48\cdot5 + 7\cdot50\cdot40 + 6\cdot50\cdot50 + 24\cdot40\cdot30 + 44\cdot90\cdot6 + 28\cdot120\cdot18 = 166520$ единиц.

2. Контрольные вопросы и практические задания для самостоятельной работы

Контрольные вопросы

1. В чем заключена суть постановки транспортной задачи?
2. Какому условию должны удовлетворять переменные x_{ij}?
3. Что показывает матрица тарифов С?
4. Функция, выражающая суммарные затраты на перевозки, должна принимать минимальное или максимальное значение?
5. Какая модель транспортной задачи называется открытой, а какая – закрытой?
6. Каким образом открытую модель можно привести к закрытой?
7. При каком условии транспортная задача всегда имеет решение?
8. Какой опорный план называется вырожденным, а какой план – невырожденным?
9. Как привести вырожденный план к невырожденному?
10. Сколько положительных компонент может содержать опорный план транспортной задачи?
11. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана транспортной задачи?
12. Какой из методов построения первоначального плана позволяет построить опорный план с наименьшей стоимостью перевозок?
13. Какой из методов построения первоначального плана позволяет построить опорный план с наибольшей стоимостью перевозок?
14. При каких условиях план транспортной задачи называется оптимальным?
15. Как строится система потенциалов? Как определяются оценки свободных клеток?
16. При каком условии транспортная задача имеет единственный оптимальный план? А при каком условии имеет множество оптимальных планов?
17. Что такое цикл? Как он строится?
18. По какому правилу производится переброска груза по циклу?

19. В чем заключается сущность блокирования перевозок?

20. Какую клетку блокируют в случае, когда суммарный запас груза превышает суммарный спрос потребителей, и требуется обязательно полностью вывезти груз i -го поставщика?

21. Решение какой задачи сводится к решению транспортной задачи?

22. По какой формуле высчитываются индексы i-того станка?

23. Какое условие является необходимым и достаточным для существования решения задачи, сведенной к транспортной?

Практические задания для самостоятельной работы

Условие задачи:

Товары с трех баз поставляются в три магазина. Запасы товаров a_1, a_2, a_3, потребности магазинов b_1, b_2, b_3, затраты c_{ij} на перевозку единицы товара с i-й базы в j-й магазин заданы в таблице.

Задание:

Согласно своему варианту, соответствующему номеру фамилии в списке группы:

1.Составить ЭММ транспортной задачи.

2.Определить план перевозки товаров, чтобы затраты на перевозку были минимальными.

3.Провести экономический анализ полученного решения.

Вариант 1.

a_i \ b_j	100	80	30
100	3	3	4
50	2	4	5
90	1	6	3

Вариант 2.

a_i \ b_j	40	80	60
30	1	4	5
20	2	4	3
150	2	5	6

Вариант 3.

a_i \ b_j	100	50	80
40	1	2	2
90	2	3	4
60	6	4	5

Вариант 4.

a_i \ b_j	100	35	85
150	2	1	3
55	3	2	5
45	5	4	3

Вариант 5.

a_i \ b_j	125	115	100
120	2	5	4
100	1	3	2
110	2	1	6

Вариант 6.

a_i \ b_j	90	70	60
80	8	1	3
120	4	2	6
100	2	5	7

Вариант 7.

b_j / a_i	15	35	50
30	4	3	1
20	6	2	8
40	5	7	4

Вариант 8.

b_j / a_i	45	25	30
35	2	1	3
25	7	6	4
60	3	5	8

Вариант 9.

b_j / a_i	150	220	200
300	1	4	7
250	3	6	2
100	3	7	3

Вариант 10.

a_i \ b_j	400	50	10
100	3	1	4
200	4	2	2
300	5	2	5

Вариант 11.

a_i \ b_j	200	100	10
400	3	2	4
50	2	1	2
100	4	2	5

Вариант 12.

a_i \ b_j	300	210	60
400	3	2	4
50	2	1	2
100	4	2	5

Вариант 13

b_j / a_i	20	30	100
180	1	3	5
20	2	2	3
50	3	4	4

Вариант 14

b_j / a_i	40	30	120
100	2	2	1
60	3	2	4
60	4	4	6

Вариант 15

b_j / a_i	100	120	50
40	1	2	4
60	3	2	3
80	3	6	7

Вариант 16

b_j / a_i	40	15	25
10	1	2	2
20	3	2	5
30	4	4	6

Вариант 17

b_j / a_i	45	35	20
15	2	1	5
15	3	2	3
55	3	4	7

Вариант 18

b_j / a_i	10	20	35
25	1	3	3
35	2	2	4
45	4	3	6

Вариант 19

b_j / a_i	120	130	150
160	4	2	6
110	3	1	2
100	3	3	6

Вариант 20

b_j / a_i	6	8	20
5	2	2	4
10	3	2	4
18	4	1	6

Вариант 21

b_j / a_i	9	10	11
12	2	5	3
13	3	6	2
14	1	3	4

Вариант 22

b_j / a_i	15	15	55
45	3	3	4
35	2	2	6
20	4	1	3

Вариант 23

b_j / a_i	90	30	80
45	4	1	3
45	2	2	4
70	4	3	6

Вариант 24

b_j / a_i	25	25	40
20	2	2	7
30	4	1	4
60	3	2	6

Вариант 25

a_i \ b_j	150	140	110
100	3	5	6
120	2	2	3
250	1	4	3

Вариант 26

a_i \ b_j	110	130	150
100	1	2	3
120	2	3	6
140	4	4	6

Вариант 27

a_i \ b_j	18	19	20
15	5	4	2
16	7	2	1
17	3	5	6

Вариант 28

b_j / a_i	24	25	26
21	3	2	7
22	6	1	2
23	4	4	5

3.Тестовые задания

1. Модель транспортной задачи является закрытой, если:

а.- $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

б.- $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$

в.- $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

г.- $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

2. В клетках распределительной таблицы транспортной задачи располагаются

а. —только тарифы перевозок c_{ij}

б.—только планы перевозок x_{ij}

в.—планы перевозок x_{ij} и соответствующие тарифы c_{ij}

г.—значения произведений $c_{ij}x_{ij}$

3. Если в транспортной задаче $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то для приведения к закрытой модели следует вводить

а.—фиктивного потребителя с тарифами, равными 0

б.—фиктивного поставщика с тарифами, равными 1

в.—фиктивного потребителя с тарифами, равными 0

г.—нулевую поставку

4. План транспортной задачи называется вырожденным, если число загруженных клеток

а.—меньше m+n-1

б.—больше m+n-1

в.—равно m+n-1

г.—равно m+n

5. Опорный план транспортной задачи размерности (m×n) должен содержать

а.- ровно $m + n$ положительных компонент

б.- не более $m + n – 1$ положительных компонент

в.- более $m + n – 1$ положительных компонент

г.- более $m + n$ положительных компонент

6. В целевой функции транспортной задачи $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to (\min)$

коэффициенты c_{ij} –это

а.—коэффициенты прямых затрат

б.—коэффициенты полных затрат

в.—стоимость перевозки одной тонны груза от i–ого поставщика к j–ому потребителю

г.—общая стоимость перевозки от i–ого поставщика к j–ому потребителю

7. В целевой функции транспортной задачи $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to (\min)$

переменные x_{ij} – это

а.—тарифы перевозок

б.—коэффициенты полных затрат

в.—коэффициенты прямых затрат

г.—объем груза от i–ого поставщика к j–ому потребителю

8. При составлении первоначального плана транспортной задачи по методу минимальной стоимости в первую очередь заполняются клетки

а.—расположенные по главной диагонали распределительной таблицы

б.—с максимальными тарифами

в.—с минимальными тарифами

г.—расположенные в первых строках и столбцах распределительной таблицы

9. При составлении первоначального плана транспортной задачи по методу «северо-западного угла» в первую очередь заполняются клетки

а.—расположенные по главной диагонали распределительной таблицы

б.—с максимальными тарифами

в.—с минимальными тарифами

г.—расположенные в первых строках и столбцах распределительной таблицы

10. Если план $X=(x^0_{ij})_{m\times n}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям

а.— $u_i+v_j = c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$ и $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j) \geq 0$ для $x_{ij}=0$

б.— $u_i+v_j = c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$ и $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j) \leq 0$ для $x_{ij}=0$

в.— $u_i+v_j \geq c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$ и $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j) \geq 0$ для $x_{ij}=0$.

г.— $u_i+v_j \leq c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$ и $\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i+v_j) \leq 0$ для $x_{ij}=0$

11. Оценками транспортной задачи называются числа γ_{ij}, которые вычисляются

а.—для занятых клеток

б.—для свободных клеток

в.—для первых двух строк распределительной таблицы

г.—для первых двух столбцов распределительной таблицы

12. Потенциалами транспортной задачи размерности ($m\times n$) называются $m+n$ чисел u_i и v_j, для которых выполняются условия

а.—$u_i+v_j=c_{ij}$ для занятых клеток

б.—$u_i+v_j=c_{ij}$ для свободных клеток

в.—$u_i+v_j=c_{ij}$ для первых двух столбцов распределительной таблицы

г.—$u_i+v_j=c_{ij}$ для первых двух строк распределительной таблицы

13. Цикл в транспортной задаче – это

а.—замкнутая ломаная линия с горизонтальными и вертикальными звеньями, все вершины которой находятся в занятых клетках

б.—замкнутая ломаная линия с горизонтальными и вертикальными звеньями, все вершины которых находятся в свободных клетках

в.—замкнутая ломаная линия, одна вершина которой в занятой клетке, а остальные в свободных клетках

г.—замкнутая ломаная линия с горизонтальными и вертикальными звеньями, одна вершина которой в свободной клетке, а остальные в занятых клетках

14. При решении транспортной задачи значение целевой функции должно от итерации к итерации

а.—увеличиваться

б.—увеличиваться или не меняться

в.—увеличиваться на γ_{ij}

г.—уменьшаться или не меняться

15. Если в плане транспортной задачи размерности ($m \times n$) число занятых клеток на единицу меньше $m+n$ -1, то

а.—план оптимальный

б.—оптимальный план неединственный

в.—одну клетку занимают нулевой перевозкой

г.—план невырожденный

16. Если все оценки для свободных клеток $\gamma_{ij} \geq 0$, то план транспортной задачи будет

а.—оптимальным

б.—невырожденным

в.—неоптимальным

г.—вырожденным

17. Число занятых клеток любого невырожденного плана транспортной задачи размерности ($m \times n$) должно быть равно

а.—$m+n$

б.—$m+n-2$

в.—$m+n-1$

г.—$m+n+1$

18. Экономически отрицательная оценка γ_{ij} показывает что, если в клетку *(i, j)* перебросить 1т груза, то суммарная стоимость перевозки

а.—увеличится на $|\gamma_{ij}|$

б.—не изменится

в.—уменьшится на $|\gamma_{ij}|$

г.—уменьшится на 2 $|\gamma_{ij}|$

19. Оптимальный план транспортной задачи будет единственным, если для свободных клеток оценки γ_{ij} удовлетворяют условиям а.— $\gamma_{ij} \geq 0$

б.— $\gamma_{ij} > 0$

в.— $\gamma_{ij} \leq 0$

г.— $\gamma_{ij} < 0$

20. Блокирование перевозок применяется для клетки (i, j), в которой

а.—наибольший тариф

б.—перевозки разрешены

в.—перевозки запрещены

г.—наименьший тариф

21. Блокирование перевозок применяется в транспортной задаче с открытой моделью. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то накладывается дополнительное условие, что груз i – го поставщика должен

а.—быть вывезен полностью

б.—частично остаться на складе

в.—не вывозиться совсем

г.—быть отправлен только j –му потребителю

22. Чтобы произвести блокировку некоторой клетки транспортной задачи, в этой клетке тариф

а.—изменяют на нуль

б.—удваивают

в.—изменяют на достаточно большое число

г.—уменьшают в два раза

23. Блокирование перевозок применяется в транспортной задаче с открытой моделью. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то накладывается дополнительное условие, что потребности j – го потребителя должны

а.—не удовлетворяться

б.—удовлетворяться полностью

в.—удовлетворяться частично

г.—должны удовлетворятся полностью только i – м поставщиком

24. Элементы матрицы производительностей $\lambda = (\lambda_{ij})_{m\times n}$ в λ - задаче имеют размерность

а.—руб/час

б.—шт/час

в.—руб

г.—шт

25. В таблице задачи о загрузке оборудования каждая клетка содержит

а.—производительность станка, затраты на один час работы станка, объем перевозок

б.—производительность станка, затраты на один час работы станка, время работы над j-ым изделием

в.—производительность станка, время работы над j-ым изделием

г.—коэффициент полных затрат, коэффициент прямых затрат, затраты на один час работы

26. В задаче о загрузке оборудования a_1 , a_2 ,..., a_m – это

а.—плановое задание

б.—фонды рабочего времени станков

в.—суточные объемы производства

г.—производительности станков

27. В задаче о загрузке оборудования α_i называется

а.—коэффициентом надежности

б.—коэффициентом полных затрат

в.—индексом i–ого станка

г.—коэффициентом прямых затрат

28. В задаче о загрузке оборудования коэффициенты $b'_j = \dfrac{b_j}{\lambda_{kj}}$,(j =1,n)

называются

а.—приведенными к стандартным часам ресурсами

б.—приведенными к стандартным часам потребностями

в.—приведенными к стандартным часам затратами

г.—приведенными к стандартным часам временами

29. В задаче о загрузке оборудования $a'_i = \alpha_i a_i, (i = 1,2,...,m)$ называются

а.—приведенным к стандартным часам фондом рабочего времени станков

б.—приведенными к стандартным часам затратами

в.—индексом i – го станка

г.—приведенными к стандартным часам заказами на выпуск изделий

30. В задаче о загрузке оборудования $x'_i = \alpha_i x_j, (j = 1,2,...,n) -$ это

а.—приведенные затраты

б.—приведенное время работы i – го станка по производству j - го вида изделий

в.—приведенные фонды рабочего времени станков

г.—приведенные ресурсы

Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов, ч.3. / Под ред. Р.Ш. Марданова. - Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2007. - Раздел 6, глава 28, §28.1-§28.4.- С.222-245.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов/ Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А.Султанов, А.Г.Фатыхов; под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГУ, 2009.- Глава 27, §27.1-§28.3. – С. 432-444.

3. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах -М.: Высшая школа, 1994.- Гл. 2, §2.1.- С. 134-175.

4. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сб. задач по мат. программированию - Минск: Высшая школа, 1985. – С.63-68.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА, 2008.- С. 476- 497.